ExerciseThinking

卷一 数学分析习题解

作者：latalealice

日期：2025/04/24

目　录

此 PDF 为习题解答

第一章 函数

1.1 函数

1.1.1

例: 设 $f(x)=\frac{|x-2|}{x+1}$,求 $f(0),f(2),f(-2),f(1),f\left(\frac{1}{2}\right)$.
答:

$$
\begin{gathered}
f(0)=\frac{|0-2|}{0+1}=2 \\
f(2)=\frac{|2-2|}{2+1}=0 \\
f(-2)=\frac{|-2-2|}{-2+1}=-4 \\
f(1)=\frac{|1-2|}{1+1}=\frac{1}{2} \\
f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\left|\frac{1}{2}-2\right|}{\frac{1}{2}+1}=1
\end{gathered}
$$

1.1.2

例: 设 $\varphi(x)=2^{x-2}$,求 $\varphi(2),\varphi(-2),\varphi\left(\frac{5}{2}\right),\varphi(a)-\varphi(b),\varphi(a)\varphi(b),\frac{\varphi(a)}{\varphi(b)}$.
答:

$$
\begin{gathered}
\varphi(2)=2^{2-2}=1 \\
\varphi(-2)=2^{-2-2}=\frac{1}{16} \\
\varphi\left(\frac{5}{2}\right)=2^{\frac{5}{2}-2}=\sqrt{2} \\
\varphi(a)-\varphi(b)=2^{a-2}-2^{b-2}=\frac{2^a-2^b}{4} \\
\varphi(a)\varphi(b)=2^{a-2}\times 2^{b-2}=\frac{2^{a+b}}{16} \\
\frac{\varphi(a)}{\varphi}*(b)=\frac{2^{a-2}}{2^{b-2}}=2^{a-b}
\end{gathered}
$$

1.1.3

例: 设 $F(x)=x^2-3x+7$,求 $F(2+h),\frac{F(2+h)-F(2)}{h}$.
答:

$$
\begin{gathered}
F(2+h)=(2+h)^2-3(2+h)+7=h^2+h+5 \\
F(2)=2^2-3\times 2+7=5 \\
\frac{F(2+h)-F(2)}{h}=\frac{h^2+h+5-5}{h}=h+1
\end{gathered}
$$

1.1.4

例: 设 $\psi(t)=ta^t(a>0)$,求 $\psi(0),\psi(1),\psi(t+1),\psi(t+1)+1,\psi\left(\frac{1}{t}\right),\frac{1}{\psi(t)}$.
答:

$$
\begin{gathered}
\psi(0)=0\times a^0=0 \\
\psi(1)=1\times a^1=a \\
\psi(t+1)=(t+1)a^{t+1} \\
\psi(t+1)+1=(t+1)a^{t+1}+1 \\
\psi\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t}a^{\frac{1}{t}} \\
\frac{1}{\psi(t)}=\frac{1}{ta^t}=\frac{1}{t}a^{-t}
\end{gathered}
$$

1.1.5

例: 确定下列函数的定义域:

$(1)y=\sqrt{3x+4};(2)y=\sqrt{2+x-x^2};$

(3)$y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$; (4)$y=\arcsin(2x+1)$;
(5)$y=\frac{1}{|x|-x}$; (6)$y=\ln(2x+1)+\sqrt{4-3x}$;
(7)$y=\ln\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$; (8)$y=x^3+e^{x-1}+\frac{1}{x-4}\ln x$;
(9)$y=\frac{1}{e^x-e^{-x}}$; (10)$y=\sqrt{\cos x}$;

答:

(1)

$$3x+4\geq 0$$
$$x\geq -\tfrac{4}{3}$$
$$\left\{x|x\geq -\tfrac{4}{3}\right\}$$

(2)

$$2+x-x^2\geq 0$$
$$(x-2)(x+1)\leq 0$$
$$-1\leq x\leq 2$$
$$\{x|-1\leq x\leq 2\}$$

(3)

$$\tfrac{1-x}{1+x}\geq 0$$
$$(1-x)(1+x)\geq 0\land 1+x\neq 0$$
$$-1<x\leq 1$$
$$\{x|-1<x\leq 1\}$$

(4)

$$-1\leq 2x+1\leq 1$$
$$-1\leq x\leq 0$$
$$\{x|-1\leq x\leq 0\}$$

(5)

$$|x|-x\neq 0$$
$$x<0$$
$$\{x|x<0\}$$

(6)

$$2x+1>0\land 4-3x\geq 0$$
$$-\tfrac{1}{2}<x\leq \tfrac{4}{3}$$
$$\left\{x|-\tfrac{1}{2}<x\leq \tfrac{4}{3}\right\}$$

(7)

$$\sin\tfrac{\pi}{x}>0\land x\neq 0$$
$$0+2k\pi<\tfrac{\pi}{x}<\pi+2k\pi\lor -2\pi-2k\pi<\tfrac{\pi}{x}<-\pi-2k\pi(k\in\mathbb{N})$$
$$\left\{x|\tfrac{1}{1+2k}<x<\tfrac{1}{2k}\lor -\tfrac{1}{1+2k}<x<-\tfrac{1}{2+2k},k\in\mathbb{N}\right\}$$

(8)

$$x>0\land x-4\neq 0$$
$$\{x|x>0\}\setminus\{4\}$$

(9)

$$e^x-e^{-x}\neq 0$$
$$e^{2x}-1\neq 0$$

$$x \neq 0$$
$$\mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(10)

$$\cos x \geq 0$$
$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{N}$$
$$\{x| -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{N}\}$$

1.1.6

例: 正方形的周长集合 L 与其面积集合 A 之间的对应是否为函数?三角形的周长集合 l 与其面积集合 S 之间的对应是否为函数?

答:

正方形的边长为 $\frac{L}{4}$,则面积为 $A = \frac{L^2}{16}$,周长集合的元素在面积集合里都有唯一一个元素与之对应,所以这样的对应是函数.

不失一般性地设三角形的三个边长为 a, b, c,则有 $a + b + c = l$, $\frac{a+b+c}{2} = p$.依海伦公式有 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{l}{2}\left(\frac{l}{2} - a\right)\left(\frac{l}{2} - b\right)\left(a + b - \frac{l}{2}\right)}$.

从公式可得:当 c 取值唯一时, a, b 取值不唯一.通过改变 a, b 的取值,相同的 l 对应不同的 S,所以这样的对应不是函数.

1.1.7

例: 下列函数是否相等,为什么?

(1)$f(x) = \frac{x}{x}; \varphi(x) = 1$
(2)$f(x) = 2\lg x; \varphi(x) = \lg x^2$
(3)$f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}; \varphi(x) = x - 3$
(4)$f(x) = \frac{\pi}{2}x; \varphi(x) = x(\arcsin x + \arccos x)$

答:

写出各个函数的定义域即可判别,

(1)

$$\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathbb{R}$$

(2)

$$\{x|x > 0\}; \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(3)

$$\mathbb{R} \setminus \{-3\}; \mathbb{R}$$

(4)

$$\mathbb{R}; \{x| -1 \leq x \leq 1\}$$

1.1.8

例: 证明:若 $\varphi(x) = \ln x$,则 $\varphi(x) + \varphi(x+1) = \varphi[x(x+1)]$.

证:

$$\varphi(x) + \varphi(x+1)$$
$$= \ln x + \ln(x+1)$$
$$= \ln[x(x+1)]$$
$$= \varphi[x(x+1)]$$

1.1.9

例：证明:若 $f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x}),a>0$,则 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$.

证:

$$f(x+y)+f(x-y)$$
$$=\frac{1}{2}(a^{x+y}+a^{-x-y})+\frac{1}{2}(a^{x-y}+a^{-x+y})$$
$$=\frac{1}{2}(a^{x+y}+a^{-x-y}+a^{x-y}+a^{-x+y})$$
$$2f(x)f(y)$$
$$=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})(a^y+a^{-y})$$
$$=\frac{1}{2}(a^{x+y}+a^{x-y}+a^{-x+y}+a^{-x-y})$$

即

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$$

1.1.10

例：证明:若 $\varphi(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$,则 $\varphi(a)+\varphi(b)=\varphi\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$.

证:

先计算左边式子

$$\varphi(a)+\varphi(b)$$
$$=\ln\frac{1-a}{1+a}+\ln\frac{1-b}{1+b}$$
$$=\ln\frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)}$$
$$=\ln\frac{1+ab-(a+b)}{1+ab+(a+b)}$$

同样右式

$$\varphi\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$$
$$=\ln\frac{1-\frac{a+b}{1+ab}}{1+\frac{a+b}{1+ab}}$$
$$=\ln\frac{1+ab-(a+b)}{1+ab+(a+b)}$$

即

$$\varphi(a)+\varphi(b)=\varphi\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$$

1.1.11

例：设一等边三角形面积为 1,取三角形各边中点互相连接得到一个小三角形,继续以此方法取三角形……如此无限重复,求这些三角形的数列.

答:

可以通过考察其面积 S 与边长 l 之间的函数关系来简化对于等边三角形的面积计算.

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}l^2$$
$$S_n=S_1q^{n-1},S_1=1$$
$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{1}{4}=q$$
$$S_n=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

1.1.12

例: 写出下列无理数的有理数不足近似数列与过剩近似值数列,使其精确到 $1, 0.1, 0.01, \cdots$.

$$\pi = 3.141592653\cdots, e = 2.718281828\cdots$$

答:

- $\pi = 3.141592653\cdots$的近似数列

  不足近似数列

$$\pi_1 = 3$$
$$\pi_2 = 3.1$$
$$\pi_3 = 3.14$$
$$\pi_4 = 3.141$$
$$\pi_5 = 3.1415$$
$$\pi_6 = 3.14159$$
$$\cdots$$

  过剩近似数列

$$\pi_1 = 4$$
$$\pi_2 = 3.2$$
$$\pi_3 = 3.15$$
$$\pi_4 = 3.142$$
$$\pi_5 = 3.1416$$
$$\pi_6 = 3.14160$$
$$\cdots$$

- $e = 2.718281828\cdots$的近似数列

  不足近似数列

$$e_1 = 2$$
$$e_2 = 2.7$$
$$e_3 = 2.71$$
$$e_4 = 2.718$$
$$e_5 = 2.7182$$
$$e_6 = 2.71828$$
$$\cdots$$

  过剩近似数列

$$e_1 = 3$$
$$e_2 = 2.8$$
$$e_3 = 2.72$$
$$e_4 = 2.719$$
$$e_5 = 2.7183$$
$$e_6 = 2.71829$$
$$\cdots$$

1.1.13

例: 证明:若 $f(x) = ax + b$,且 $\{x_n\}$ 为等差数列,则 $\{f(x_n)\}$ 也是等差数列.

答:

$$\because x_n = x_1 + d(n-1)$$
$$f(x) = ax + b$$
$$\therefore f(x_{n+1}) - f(x_n) = a(x_{n+1} - x_n) = ad$$
$$f(x_n) = f(x_1) + ad(n-1) = ax_1 + b + ad(n-1)$$

1.1.14

例: 证明:若 $\{a_n\}$ 为等比数列,且 $a_n > 0$,则 $\{\ln a_n\}$ 是等差数列.

答:

$$\because a_n = a_1 q^{n-1}, q > 0$$
$$\therefore \ln a_{n+1} - \ln a_n = \ln \tfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ln q$$

1.2 四类具有特殊性质的函数

1.2.1

例: 证明:若函数 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 在数集 A 有界,则函数 $f(x) + \varphi(x), f(x) - \varphi(x), f(x)\varphi(x)$ 在数集 A 有界.

答:

$$\because \forall x \in A, \exists M > 0, |f(x)|, |\varphi(x)| < M$$
$$\therefore |f(x) + \varphi(x)| \leq |f(x)| + |\varphi(x)| < 2M$$
$$|f(x) - \varphi(x)| \leq |f(x)| + |-\varphi(x)| < 2M$$
$$|f(x)\varphi(x)| = |f(x)\|\varphi(x)| < M^2$$

1.2.2

例: 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同定义域,证明:

1) 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为偶函数,则 $f(x)g(x)$ 也为偶函数;
2) 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为奇函数,则 $f(x)g(x)$ 为偶函数;
3) 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 一个为奇函数,一个为偶函数,则 $f(x)g(x)$ 为奇函数.

答:

1)

$$\because f(x) = f(-x), g(x) = g(-x)$$
$$\therefore f(x)g(x) = f(-x)g(-x)$$

2)

$$\because f(x) = -f(-x), g(x) = -g(-x)$$
$$\therefore f(x)g(x) = f(-x)g(-x)$$

3)

$$\because f(x) = -f(-x), g(x) = g(-x)$$
$$\therefore f(x)g(x) = -f(-x)g(-x)$$

1.2.3

例: 证明:若函数 $f(x)$ 的定义域是 $\mathbb{R}$,则 $F_1(x) = f(x) + f(-x)$ 是偶函数; $F_2(x) = f(x) - f(-x)$ 是奇函数,并写出函数 $f(x) = a^x$ 与 $f(x) = (1+x)^n$ 的 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$.

答:

$$F_1(-x) = f(-x) + f(x) = F_1(x)$$

$$F_2(-x)=f(-x)-f(x)=-F_2(x)$$

$f(x)=a^x$

$$F_1(x)=a^x+a^{-x}$$
$$F_2(x)=a^x-a^{-x}$$

$f(x)=(1+x)^n$

$$F_1(x)=(1+x)^n+(1-x)^n$$
$$F_2(x)=(1+x)^n-(1-x)^n$$

1.2.4

例: 指出下列函数哪些是奇函数?哪些是偶函数?

$1)x+3x^3+x^5;2)x^2-3x^4+x^6;3)x+\sin x;$

$4)x\sin\frac{1}{x};5)x^2\sin\frac{1}{x};6)\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right);$

$7)\ln\frac{1-x}{1+x};8)2^{x^2-1};9)\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

答:

$$-x+3(-x)^3+(-x)^5=-(x+3x^3+x^5)$$
$$(-x)^2-3(-x)^4+(-x)^6=x^2-3x^4+x^6$$
$$-x+\sin(-x)=-(x+\sin x)$$
$$-x\sin\tfrac{1}{-x}=x\sin\tfrac{1}{x}$$
$$(-x)^2\sin\tfrac{1}{-x}=-x^2\sin\tfrac{1}{x}$$
$$\ln\left(-x+\sqrt{1+(-x)^2}\right)=\ln\tfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$
$$\ln\tfrac{1-(-x)}{1+(-x)}=-\ln\tfrac{1-x}{1+x}$$
$$2^{(-x)^2-1}=2^{x^2-1}$$
$$\tfrac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}=\tfrac{e^x+e^{-x}}{2}$$

1.2.5

例: 证明:函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 无界.

答:

有下确界 $y=1$

$$\exists 1\in\mathbb{R},\forall 0<x<1,f(x)\geq 1$$
$$\forall\varepsilon>0,\exists x_\varepsilon=\tfrac{1}{\varepsilon+1},f(x_\varepsilon)=\varepsilon+1>1$$
$$\forall a>0,\exists x_a=\tfrac{1}{a+1},f(x_a)=a+1>a$$

1.2.6

例: 判断下列函数哪些是周期函数,若有最小正周期,指出其最小正周期.

$1)y=\sin^2 x;2)y=\sin x^2;3)y=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0);$

$4)y=\cos 5\pi x;5)y=\sqrt{\tan x};6)y=D(x);$

$7)y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x;8)y=\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{5}.$

答:

1)

$$\sin^2(x+k\pi)=(-1)^{2k}\sin^2 x, l=\pi$$

2)

$$\sin(x+l)^2=\sin x^2, 2lx+l^2=2k\pi, l=0$$

3)

$$\sin(\omega(x+l)+\varphi)=\sin(\omega x+\varphi), \omega l=2k\pi, l=\frac{2\pi}{\omega}$$

4)

$$l=\frac{2}{5}$$

5)

$$l=\pi$$

6)

$$l=\frac{p}{q}$$

7)

$$\sin(x+l)+\frac{1}{2}\sin 2(x+l)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x, l=2\pi$$

8)

$$\sin\frac{x+l}{2}+\sin\frac{x+l}{5}=\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{5}, l=20\pi$$

1.2.7

例：证明:若函数 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数,则函数 $F(x)=f(ax)$ 是以 $\frac{T}{a}(a>0)$ 为周期的周期函数.

答:

$$\because f(x+T)=f(x)$$

$$\therefore F\left(x+\frac{T}{a}\right)=f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right)=f(ax)=F(x)$$

1.2.8

例：证明:函数 $f(x)$ 在区间 I 单调 $\Longleftrightarrow \forall x_1,x_2,x_3\in I, x_1<x_2<x_3$,有

$$[f(x_3)-f(x_2)][f(x_2)-f(x_1)]\geq 0.$$

答:

$$\because x_3>x_2>x_1$$

$$\therefore f(x_3)\geq f(x_2)\geq f(x_1)(f(x_3)\leq f(x_2)\leq f(x_1))$$

$$f(x_3)-f(x_2)\geq 0, f(x_2)-f(x_1)\geq 0(f(x_3)-f(x_2)\leq 0, f(x_2)-f(x_1)\leq 0)$$

$$[f(x_3)-f(x_2)][f(x_2)-f(x_1)]\geq 0$$

1.2.9

例：列举符合下列条件的函数:

1) 在 $\mathbb{R}$ 严格减少的奇函数;

2) 在 $\mathbb{R}$ 单调减少的偶函数;

3) 在 $\mathbb{R}$ 是偶函数、周期函数,且不存在单调区间;

4) 在 $\mathbb{R}$ 是奇函数、偶函数、单调函数、周期函数.

答:

$$y=-x$$

$$y=1$$

$$y = D(x)$$
$$y = 0$$

1.2.10

例: 证明:在 $\mathbb{R}$ 不存在严格增加的偶函数.

答:

$$\because f(x) = f(-x)$$
$$\therefore \forall x_2 < 0 < x_1, x_1 = -x_2, f(x_1) = f(x_2)$$

1.2.11

例: 列表对比下列的定义及其否定叙述:

1)$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 是偶函数;

2)$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 是周期函数;

3)$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 是严格增加函数;

4)$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 是单调减少函数.

答:

定义	否定
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)$	$\exists x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) \neq f(-x_0)$
$\forall x \in \mathbb{R}, \exists l > 0, f(x+l) = f(x)$	$\forall l > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0 + l) \neq f(x_0)$
$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \wedge f(x_1) < f(x_2)$	$\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \wedge f(x_1) \geq f(x_2)$
$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \wedge f(x_1) \geq f(x_2)$	$\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \wedge f(x_1) < f(x_2)$

1.2.12

例: 证明: $f(x) = x^2 - x$ 在 $\mathbb{R}$ 不是偶函数,不是周期函数,不是严格增加函数,也不是单调减少函数.

答:

$$f(1) = 0 \neq f(-1) = 2$$
$$\text{if } f(x+l) = f(x)$$
$$(x+l)^2 - (x+l) = x^2 - x$$
$$l^2 + (2x-1)l = 0$$
$$\text{only trivial solution } l = 0$$
$$f(1) = 0 < f(-1) = 2$$
$$f(1) = 0 < f(2) = 2$$

1.2.13

例: 证明:在区间 $(-l, l)$ 有定义的任意函数 $f(x)$ 都能表示为奇函数与偶函数之和.

答:

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

1.2.14

例：证明:若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是定义在 A 的周期函数,周期分别是 T_1 与 T_2,且 $\frac{T_1}{T_2}=a$,而 a 是有理数,则 $f(x)+g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 都是 A 的周期函数.

答:

$$\frac{T_1}{T_2}=a=\frac{p}{q},p,q\in\mathbb{N}_+$$
$$f(x)+g(x)=f(x+qT_1)+g(x+pT_2)=f(x+T)+g(x+T)$$
$$f(x)g(x)=f(x+qT_1)g(x+pT_2)=f(x+T)g(x+T)$$
$$T=qT_1=pT_2$$