StudyThinking

卷一 数学分析笔记

作者：latalealice

日期：2025/04/24

目　录

序言

模版参考 https://github.com/IxionWheel/LessElegantNote
感谢 IxionWheel 的大力支持

0.1 重新学习数学

中学时谨遵高斯的教诲,认为“rather less, but letter”,以此为基础的学习逻辑用在高等数学上虽然看起来赏心悦目,实则不得要领.我的大学数学的学习相当糟糕,我不禁怀疑自己的数学能力是否只是应试教育题海战术堆积出来的苦力结果,而非一看教材就无师自通的天赋结果.答案当然是肯定的.进入大学后的数学学习,我不仅练习题目数量减少,就连教材也不愿意多看,考试前也只是把平时老是布置的作业拿出来装模作样看一遍.但数学的成绩不会骗人.

除去自我能力的提高,理论知识的学习也有其他莫大的益处,可以让人短暂遗忘现实的苦痛.

$$a^2+b^2=c^2$$

0.2 常用符号与不等式

0.2.1 集合符号

- 集合与元素

符号 $\in$ 表示属于;符号 $\notin$ 表示不属于;符号 $P(x)$ 表示元素 x 具有性质 P.

$x\in A \Longleftrightarrow$ 元素 x 属于 A; $x\notin A \Longleftrightarrow$ 元素 x 不属于 A; $\{x|x\in A, P(x)\} \Longleftrightarrow$ 集合 A 中具有 P 性质的全体元素 x.

- 集合与集合

符号 $\subset$ 表示包含;符号 $=$ 表示相等;符号 $\varnothing$ 表示空集;符号 $\cup$ 表示并或和;符号 $\cap$ 表示交或乘;符号 $\setminus$ 表示差;符号 $\wedge$ 表示且;符号 $\vee$ 表示或.

设 A 与 B 是两个集合:

$B\subset A \Longleftrightarrow B$ 的任意元素 x 都是 A 的元素,或 B 是 A 的子集,或 B 被 A 包含.

$B\subset A$,且 $B\neq A \Longleftrightarrow B$ 是 A 的真子集.

$A\setminus B$=$\{x|x\in A\wedge x\notin B\} \Longleftrightarrow B$ 关于 A 的差集.

若 $B\subset A, C_A B=\{x|x\in A\wedge x\notin B\} \Longleftrightarrow$ A 中子集 B 的补集.

$A\cup B \Longleftrightarrow A$ 与 B 的并集,即 $A\cup B=\{x|x\in A\vee x\in B\}$.

$A\cap B \Longleftrightarrow A$ 与 B 的交集,即 $A\cap B=\{x|x\in A\wedge x\in B\}$.

设 $A_1, A_2, A_3, ..., A_n, ...$ 是一列无限多个集合.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}=\{x|\exists k\in\mathbb{N}_+, x\in A_k\}$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}=\{x|\forall k\in\mathbb{N}_+, x\in A_k\}$$

0.2.2 数集符号

本笔记所说的数均为实数.全体实数,实数集记为 $\mathbb{R}$.实数集 $\mathbb{R}$ 中的数与数轴上的点一一对应,所以 $\mathbb{R}$ 也称为实直线,数 a 也常说成点 a.$\mathbb{R}$ 有一些常用重要的子集:

$\mathbb{N}_+$ 表示正整数集;$\mathbb{N}$表示自然数集;$\mathbb{Z}$表示整数集;$\mathbb{Q}$表示有理数集,有 $\mathbb{N}_+ \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

$\mathbb{R}_+$ 表示正实数集,$\mathbb{R}_-$ 表示负实数集,有 $\mathbb{R} = \mathbb{R}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_+$.

- 区间

$-\infty$表示比一切实数小,$+\infty$表示比一切实数大.对于任意实数x都有 $-\infty < x < +\infty$.无穷开区间 $(-\infty, +\infty)$ 也表示实数集.

符号	定义	名称
(a,b)	$\{x \mid a < x < b\}$	开区间
$[a,b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	闭区间
$(a,b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	半开区间
$[a,b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	半开区间
$(a,+\infty)$	$\{x \mid x > a\}$	开区间
$[a,+\infty)$	$\{x \mid x \geq a\}$	闭区间
$(-\infty,a)$	$\{x \mid x < a\}$	开区间
$(-\infty,a]$	$\{x \mid x \leq a\}$	闭区间

- 邻域

设 $a \in \mathbb{R}, \forall \delta > 0$

数集 $\{x \mid |x-a| < \delta\}$记为 $U(a,\delta)$,即 $U(a,\delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\} = (a-\delta, a+\delta)$,称为 a的 δ邻域.对于某个确定的邻域半径 δ,不需要标注 δ,直接表述为$U(a)$,简称a的邻域.

数集 $\{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$记为 $\mathring{U}(a,\delta)$,即 $\mathring{U}(a,\delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\} = (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$,称为$a$的$\delta$去心邻域.对于某个确定的邻域半径$\delta$,不需要标注$\delta$,直接表述为$\mathring{U}(a)$,简称$a$的去心邻域.

0.2.3 逻辑符号

- 连词符号

符号$\Longrightarrow$表示从左往右可以推得.例如n是整数 $\Longrightarrow$ n是有理数.

$A \Longrightarrow B$:若A成立则B成立;称A是B的充分条件,B是A的必要条件.

符号$\Longleftrightarrow$表示左右两边等价.例如$A \subset B \Longleftrightarrow \forall x \in A, x \in B$.

$A \Longleftrightarrow B$:若A成立则B成立,同时若B成立则A成立;称A是B的充分必要条件.

- 量词符号

符号$\forall$表示任意;符号$\exists$表示存在.数集A的上下界和有界定义可以写成:

$$\text{数集 A 有上界} \Longleftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \leq M;$$
$$\text{数集 A 有下界} \Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \geq m;$$
$$\text{数集 A 有界} \Longleftrightarrow \exists a > 0, \forall x \in A, |x| \leq a;$$
$$\text{数集 A 无上界} \Longleftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in A, x > M;$$

0.2.4 其他符号

符号 max表示最大;符号 min表示最小.例如:

$$\max\{1,2,3\}=3$$
$$\min\{1,2,3\}=1$$

符号 $[a]$ 表示不超过 a 的最大整数.例如:

$$[\pi]=3$$
$$[-1.1]=-2$$

符号 $n!$ 表示不超过 n 的所有正整数乘积.例如:

$$5!=5\times4\times3\times2\times1$$

值得注意的是, $0!$ 的值被规定为 1.

符号 $n!!$ 表示不超过 n 且与 n 有相同奇偶性的正整数乘积.例如:

$$5!!=5\times3\times1$$
$$6!!=6\times4\times2$$

符号 C_n^m 表示从 n 个不同元素去中 m 个元素的组合数.例如:

$$C_4^2=\frac{4\times3}{1\times2}$$
$$C_n^m=\frac{n\times(n-1)\times...\times(n-m+1)}{1\times2\times...\times m}=\frac{n!}{m!\times(n-m)!}$$

假设有 n 个表面印刷编号不一致,其他性质都一致的小球放在一个不透明箱子里,每次从箱子中依次不放回取出一个小球,那么第 1 次取出小球的编号有 n 种可能,第 2 次有 $n-1$ 种可能……第 m 次有 $n-m+1$ 可能,有序抽取的可能事件数即为 $n\times(n-1)\times...\times(n-m+1)$.在抽取 m 个小球后,把 m 个编号作为一个集合来看,会有多种有序抽取结果形成相同的集合.现在考虑 m 次有序抽取会形成多少种相同集合数,第 1 次被抽中的小球有 m 种可能,第 2 次有 $m-1$ 种可能……第 m 次有 1 种可能,即会有 $m\times(m-1)\times...\times1$ 次的有序抽取会出现相同的无序结果.那么从装有 n 个小球的箱子里无序取出 m 个小球的可能事件数即为 $C_n^m=\frac{n\times(n-1)\times...\times(n-m+1)}{1\times2\times...\times m}$.

有公式:

$$C_n^m=C_n^{n-m};C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$$

0.2.5 几个有用的不等式

- $\forall n\in\mathbb{N}_+\wedge n\geq2,\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times...\times\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

证明:

设 $A=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times...\times\frac{2n-1}{2n}$,考虑到 $n^2+2n<n^2+2n+1=n(n+2)<(n+1)^2\Longleftrightarrow\frac{n}{n+1}<\frac{n+1}{n+2}$,将 A 中的每个分数以此不等式放大:

$$A<\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times...\times\frac{2n}{2n+1}$$
$$=\frac{2}{1}\times\frac{4}{3}\times...\times\frac{2n}{2n-1}\times\frac{1}{2n+1}$$
$$=\frac{1}{A(2n+1)}$$

即

$$A^2<\frac{1}{2n+1}$$

即

$$A<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

- $\forall x\in\mathbb{R}\wedge x>-1,\forall n\in\mathbb{N}_+\wedge n>1,(1+x)^n\geq1+nx$（伯努利不等式）.

证明:

当 x=0 时,对于 $\forall n>1$ 都有 $(1+x)^n=1+nx$.

当 $n=2$ 时, $(1+x)^2=1+2x+x^2>1+2x$,显然成立.
设当 $n=k$ 时不等式成立,那么当 $n=k+1$ 时,

$$(1+x)^{k+1}=(1+x)^k(1+x)$$

$$>(1+kx)(1+x)$$

$$=1+(k+1)x+kx^2$$

$$>1+(k+1)x$$

综上所述,不等式成立.

- 若 $x_i>0, i=1,2,...,n$ 且 $x_1x_2...x_n=1$,则有

$$x_1+x_2+...+x_n\geq n$$

当且仅当 $x_1=x_2=...=x_n=1$ 时,取等号.
证明:
当 $n=1, x_1=1$,不等式成立;当 $n=2, x_1=\frac{1}{x_2}, x_1+\frac{1}{x_1}\geq 2$,不等式成立.
设当 $n=k$ 时不等式成立,当 $n=k+1$ 时:
$1^{\circ}: x_1=x_2=...=x_{k+1}=1, x_1+x_2+...+x_{k+1}=k+1$,不等式成立.
$2^{\circ}: x_i$ 不全为 1,不失一般性地设 $x_1<1, x_2>1, y=x_1x_2$,即有 $y+x_3+...+x_{k+1}\geq k$,

$$x_1+x_2+...+x_{k+1}$$

$$=y+x_3+...+x_{k+1}-y+x_1+x_2$$

$$\geq k-y+x_1+x_2$$

$$=k+x_1+x_2-x_1x_2-1+1$$

$$=k+1+(x_2-1)(1-x_1)$$

$$\geq k+1$$

综上所述,不等式成立.当且仅当 $x_1=x_2=...=x_n=1$ 时,取等号.

- 若 $\forall x_i>0, i=1,2,...,n$.设

$$T_n=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}$$
$$J_n=\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}$$
$$S_n=\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$$

有不等式

$$T_n\leq J_n\leq S_n$$

同时有

$$T_n=J_n=S_n\iff x_1=x_2=...=x_n$$

证明:
已知 $\frac{x_1}{J_n}\cdot\frac{x_2}{J_n}\cdot...\cdot\frac{x_n}{J_n}=1$,有

$$\frac{x_1}{J_n}+\frac{x_2}{J_n}+...+\frac{x_n}{J_n}\geq n$$
$$x_1+\frac{x_2}{+}...+x_n\geq nJ_n$$
$$\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}=S_n\geq J_n$$

当且仅当 $\frac{x_1}{J_n}=\frac{x_2}{J_n}=...=\frac{x_n}{J_n}\iff x_1=x_2=...=x_n$ 时取等号.
对上述结果的 x_i 取倒数有

$$\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}{n}\geq\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}...\frac{1}{x_n}}$$
$$\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}=J_n\geq\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}=T_n$$

当且仅当 $\frac{x_1}{J_n}=\frac{x_2}{J_n}=...=\frac{x_n}{J_n}\Longleftrightarrow x_1=x_2=...=x_n$时取等号.

$$T_n\leq J_n\leq S_n$$

$$T_n=J_n=S_n\Longleftrightarrow x_1=x_2=...=x_n$$

- 若 $\forall n\in\mathbb{N}_+\wedge n>2$,

$$\sqrt{n}<\sqrt[n]{n!}<\frac{n+1}{2}$$

证明:

先证 $n^n<(n!)^2$

$$(n!)^2=n!\cdot n!$$

$$=(1\cdot n)\cdot[2\cdot(n-1)]\cdot...\cdot(n\cdot 1)$$

对于 $0<k<n$,都有 $(k+1)(n-k)=k(n-k)+n-k>k+n-k>n$,则

$$(n!)^2>n^n$$

再证 $\sqrt[n]{n!}<\frac{n+1}{2}$,依照前文所证的几何平均小于等于算术平均有

$$\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot ...\cdot n}<\frac{1+2+...+n}{n}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2n}$$

$$=\frac{n+1}{2}$$

- 若 $\forall n\in\mathbb{N}_+$,有不等式

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

证明: 利用几何平均小于等于算术平均有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}}<\frac{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}=1+\frac{1}{n+1}$$

即

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

第一章 函数

1.1 函数

1.1.1 函数概念

一物体在真空中从距离地面高度 h 处自由下落，其下落时间 t 与下落距离 s 相互联系,只需要求加速度对时间积分与速度对时间积分即可,

$$\forall t \in \left[0, \sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$$
$$v = \int g \, \mathrm{d}t = gt$$
$$s = \int v \, \mathrm{d}t = \int gt \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}gt^2$$

其中 g 为重力加速度,常数.

球的半径 R 与其体积 V 相互联系,沿同一个方向将球平均等分成一个个厚度几乎不计的圆,则圆的半径 r 与其圆心到球心距离 x 的关系可以用毕达哥拉斯定理表示, 再求圆面积对距离积分即可,

$$\forall R \in [0, +\infty), x \in [0, R]$$
$$r = \sqrt{R^2 - x^2}$$
$$V = 2\int_0^R \pi r^2 \, \mathrm{d}x$$
$$= 2\pi \int \left(R^2 - x^2\right) \mathrm{d}x$$
$$= 2\pi R^3 - 2\pi \frac{R^3}{3}$$
$$= \frac{4}{3}\pi R^3$$

其中 π 为圆周率,常数.

- 定义

设 A 为非空实数集.若存在对应关系 f,对 A 中任意数 $x(\forall x \in A)$,按照对应关系 f,对应唯一一个 $y \in R$,则称 f 是定义在 A 上的函数,记为

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

数 x 对应的数 y 称为 x 的函数值,记为 $y = f(x)$. x 称为自变量, y 称为因变量.数集 A 称为函数 f 的定义域,函数值的集合 $f(A) = \{f(x)|x \in A\}$ 称为函数 f 的值域.

$*$这样的函数概念有缺陷且不严格,用纯集合论语言给出定义会比较精确.

1.1.2 函数的四则运算

- 定义

设两个函数 f 和 g 分别定义在数集 A 和 B

1) 若 $A = B$,且 $\forall x \in A$,有 $f(x) = g(x)$,则称函数 f 和 g 相等,记为 $f = g$.

2) 若 $A \cap B \neq \varnothing$,则函数 f 和 g 的和 $f + g$、差 $f - g$、积 fg 分别定义为

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), x \in A \cap B$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x), x \in A \cap B$$

3) 若 $(A \cap B) \setminus \{x|g(x) = 0\} \neq \varnothing$,则函数 f 和 g 的商 $\frac{f}{g}$ 定义为

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in (A \cap B) \setminus \{x|g(x) = 0\}$$

- 多项式函数 $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n, x \in \mathbb{R}$

其中 $n \in \mathbb{N}_+, a_0, a_1, ..., a_n$ 都是常数,且 $a_0 \neq 0$.

- 符号函数“$\forall x > 0, y = 1; x = 0, y = 0; \forall x < 0, y = -1.$”

$$y = sgnx = \begin{cases} 1 \text{ if } x>0 \\ 0 \text{ if } x=0 \\ -1 \text{ else} \end{cases}$$

$\forall x \in R$,总有

$$|x| = xsgnx$$

- 狄利克雷函数“当 x 是有理数时, $y = 1$;当 x 是无理数时, $y = 0$.”

$$y = D(x) = \begin{cases} 1 \text{ if } x=\frac{m}{n} \\ 0 \text{ else} \end{cases}$$

- 黎曼函数

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ if } x=\frac{m}{n} \\ 1 \text{ if } x=0 \\ 0 \text{ else} \end{cases}$$

1.1.3 数列

- 定义

定义在正整数集 $\mathbb{N}_+$ 上的函数 $f(x)$ 称为数列 $\forall n \in \mathbb{N}_+, f(n) = a_n$.数列的值域 $\{a_n | n \in \mathbb{N}_+\}$ 中的数能按照正整数顺序排列:

$$a_1, a_2, ..., a_n, ...$$

简单记为 $\{a_n\}$.

1.2 四类具有特殊性质的函数

1.2.1 有界函数

值得注意的是“函数 $f(x)$ 定义在数集 A 上”和“函数 $f(x)$ 在数集 A 上有定义”的含义稍有不同,前者指数集 A 是函数 $f(x)$ 的定义域;后者指数集 A 是函数 $f(x)$ 的定义域或者定义域的子集.

- 定义

设函数 $f(x)$ 在数集 A 上有定义,且函数集有界(有上界、有下界),则称函数有界,反之称函数无界(无上界、无下界).

定义	符号语言
函数 $f(x)$ 在 A 上有上界	$\exists b \in \mathbb{R}, \forall x \in A, f(x) \leq b$
函数 $f(x)$ 在 A 上无上界	$\forall b \in \mathbb{R}, \exists x_b \in A, f(x_b) > b$
函数 $f(x)$ 在 A 上有下界	$\exists b \in \mathbb{R}, \forall x \in A, f(x) \geq a$
函数 $f(x)$ 在 A 上无下界	$\forall b \in \mathbb{R}, \exists x_a \in A, f(x_a) < a$
函数 $f(x)$ 在 A 上有界	$\exists M > 0, \forall x \in A, \lvert f(x) \rvert \leq M$
函数 $f(x)$ 在 A 上无界	$\forall M > 0, \exists x_M \in A, \lvert f(x_M) \rvert > M$

1.2.2 单调函数

- 定义

设函数 $f(x)$ 在数集 A 上有定义.

若 $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2$,有 $f(x_1) < f(x_2)(f(x_1) > f(x_2))$,则称 $f(x)$ 在 A 上严格单调增加(减少).

若 $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2$,有 $f(x_1) \le f(x_2)(f(x_1) \ge f(x_2))$,则称 $f(x)$ 在 A 上单调增加(减少).

函数 $f(x)$ 在 A 严格单调增加、严格单调减少与单调增加、单调减少,统称 $f(x)$ 单调;严格单调增加与严格单调减少统称为严格单调.若 A 是区间,此区间称为单调区间.

$*$常值函数 $f(x) = c \Longleftrightarrow$ 即使单调增加函数又是单调减少函数.

1.2.3 奇函数与偶函数

- 定义

设函数 $f(x)$ 在数集 A 上有定义.

若 $\forall x \in A$,有 $-x \in A$,且 $f(x) = -f(-x)(f(x) = f(-x))$,则称 $f(x)$ 为奇函数(偶函数).

奇函数的图像关于原点对称,偶函数的图像关于 y 轴对称.

常值函数是偶函数.函数 $f(x) = 0$ 既是奇函数又是偶函数.

1.2.4 周期函数

- 定义

设函数 $f(x)$ 定义在数集 $A \subset \mathbb{R}$.

若 $\exists l > 0, \forall x \in A$,有 $x + l \in A$,且 $f(x) = f(x + l)$,则称函数 $f(x)$ 是周期函数,l 称为函数 $f(x)$ 的一个周期.

显然,数集 A 在 $\mathbb{R}$ 中必无界.

用数学归纳法不难证明,若 l 是函数 $f(x)$ 的周期,那 nl 也是函数 $f(x)$ 的周期.若函数 $f(x)$ 有最小的正周期,称之为基本周期.

对于常值函数,任意非零的正数都是它的周期,但没有最小的正周期.

1.3 复合函数与反函数

1.3.1 复合函数

- 定义

设函数 $z = f(y)$ 定义在数集 B 上,函数 $y = \varphi(x)$ 定义在数集 A 上,G 是 A 中使 $A\varphi(x) \in B$ 的非空子集,即 $G = \{x | x \in A, \varphi(x) \in B\} \neq \varnothing$.

$\forall x \in G$,按照对应关系 φ,对应唯一一个 $y \in B$,再按照对应关系 f 对应唯一一个 z,即 $(f \circ \varphi)(x) = f[\varphi(x)], x \in G$.

$*$ $f \circ \varphi$ 作为一种复合运算,不满足交换律,例如 $f(x) = \sin x, \varphi(x) = x^2, (f \circ \varphi)(x) = \sin x^2, (\varphi \circ f)(x) = (\sin x)^2$. 但满足结合律, $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

1.3.2 反函数

- 定义

设函数 $y = f(x)$ 在数集 A 有定义,值域是 $f(A)$,若 $\forall x_1, x_2 \in A$,有 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$,或者 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$,则称函数 $f(x)$ 在 A 到 $f(A)$ 上一一对应,即 $\forall y \in f(A)$ 只有唯一一个 $x \in A$,使 $f(x) = y$.

- 定义

设函数 $y = f(x)$ 在 A 到 $f(A)$ 上一一对应,则 $\forall y \in f(A)$,存在唯一一个 $f(x) = y$,这个由 $f(A)$ 到 A 的对应关系,称为